② تعريف تجزئة فترة [a,b] — الخميس 22/10/2015

تعريف تجزئة فترة ما مثل $[a,b]$:

نسمي مجموعة النقاط

$$P_{[a,b]} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

حيث تحقق فيما بينها:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_k \in [a,b] \qquad 2 \le k \le n$$

أي أنها متتالية متزايدة من النقاط وهي منتهية تجزئة للفترة $[a,b]$ أو نكتب اختصاراً:

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

- نلاحظ أنه يمكن تجزئة الفترة المغلقة والمحدودة $[a,b]$ بعدة أشكال مختلفة لذلك يوجد أكثر من تجزئة للفترة. ونستطيع القول أن التجزئة ليست وحيدة. وهذا يعني أننا نحصل على أسرة من التجزئات لهذه الفترة والتي نرمز لها عادة $\mathbb{P}_{[a,b]}$ وهي أسرة كل التجزئات الممكنة للفترات المغلقة $[a,b]$.

مثال:

لتكن لدينا الفترة $[0,1]$ يمكننا الحصول على عدة تجزئات بالشكل:

$$P_1 = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$$

$$P_2 = \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\}.$$

تعريف نظيم التجزئة:

نسمي العدد $\|x\|$ نظيم x أو $\lambda(P)$ نظيم التجزئة P للفترة $[a,b]$ ونرمز:

$$\lambda(P) = \|P\| = \max_{1 \le k \le n} \{|x_k - x_{k-1}|\}$$

كما يسمونه ذراع التجزئة.

تعريف الدالة ذات التغيرات المحدودة:

لتكن f دالة معرفة بالشكل: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ أي معرفة على فترة مغلقة ومحدودة ولنفرض أن:

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}.$$

تجزئة للفترة $[a,b]$.

نشكل المجموع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$v(f;P) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \quad ①$$

تحسب قيم الدالة عند نقاط التجزئة.

ومن أجل كل تجزئة للفترة $[a,b]$ يمكننا الحصول على مجموع من هذا القبيل وبالتالي يكون لدينا أسرة من المجاميع الموافقة لكل التجزئات الممكنة لـ $[a,b]$ أي أننا نحصل على جماعة من المجاميع.

$$\{ v(f;P) \; ; \; \forall P \in P_{[a,b]} \} \quad ②$$

- إذا كانت المجموعة ② أو أسرة المجاميع ② محدودة، أو محدودة أي يوجد ثابت حقيقي $M > 0$ بحيث يكون لجميع عناصرها: $v(f;P) \leq M$ (أي هذا المجموع محدود) أياً كانت $P \in P_{[a,b]}$ فإننا نقول عندئذ عن الدالة f أنها ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$. وفي هذه الحالة نسمي الحد الأعلى الأصغر لهذه الأسرة بالتغير الكلي للدالة f على الفترة $[a,b]$ ونرمز له $V(f;[a,b])$ أو $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

وعنده يمكننا كتابة التغير الكلي بالتعريف هو:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup \{ v(f;P) \; ; \; P \in P_{[a,b]} \}.$$

أما إذا كانت المجموعة ② غير محدودة فإننا نقول عن الدالة أنها ليست ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$ وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = +\infty$$

ملاحظة:

من الآن فصاعداً سيكون أن نقول دالة ذات تغيرات محدودة بدلاً من محدودة التغير أحياناً ونكتب اختصاراً: ذ.ت.م ونرمز لصف الدوال ذ.ت.م على $[a,b]$ بالرمز: $BV[a,b]$ ونكتب $f \in BV[a,b]$.

① من التعريف ينتج أنه إذا كانت $f \in BV[a,b]$ فإن كل حد من حدودها لا يتجاوز التغير. $v(f;P) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ وهذا التعريف ينتج من تعريف الحد الأعلى الأصغر لـ (أي أنه حد أعلى فلا يتجاوزها).

③ في حال كانت الدالة f معرفة على فترة غير محدودة مثل $[a,\infty[$ فتكون f ذ.ت.م على هذه الفترة إذا كانت ذ.ت.م على الفترة المغلقة $[a,A]$ ويوجد ثابت K لا يتعلق بـ A بحيث يكون التغير الكلي للدالة f يكون بالشكل.

$$\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{A>a} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{A\to\infty} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f).$$

وبصورة مماثلة يمكن التعامل مع الفترات $]a, \infty[$ ، $]-\infty, b[$ ، $]-\infty, \infty[$

$$\sup_{\substack{A>a \\ B<b}} \overset{B}{\underset{A}{V}}(f)$$

(4) اذا كانت $a > b$ فاننا نضع:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = -\overset{a}{\underset{b}{V}}(f).$$

مثال:

باستخدام التعريف ناقش فيما اذا كانت الدالة

$f(x) = x^2 + 1$

على الفترة $[0,4]$ ذات تغير محدود فيها اوجد تغيرها الكلي.

الحل: لدينا: $f : [0,4] \to \mathbb{R}$.

ولتكن P تجزئة للفترة $[0,4]$ بالشكل:

$$P = P[0,4] = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b_n\}.$$

من تجزئة اختيارية كيفية عشوائية ولنبني الآن المجموع الموافق لهذه التجزئة الاختيارية فنحصل على:

$$v(x^2+1; P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |x_k^2 + 1 - x_{k-1}^2 + 1|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2)$$

$$= x_n^2 - x_0^2 = 16 - 0 = 16.$$

مهما تكن P اختيارية فالمجموع $v(f; P)$ محدود والدالة ذات تغير محدود على الفترة $[0,4]$ وتغيرها الكلي:

$$\overset{4}{\underset{0}{V}}(x^2+1)=\sup\{16\}=16>0$$

ملاحظة:

الدالة المعرفة مستمرة وليست ذ.ت.م إلا أننا سنواجه دوال مستمرة وليست ذ.ت.م على فترات محدودة كـ $[a,b]$.

مثال ②:

بيّن فيما إذا كانت الدالة f المعرفة بالصورة:

$$f=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x} & ; \quad 0<x\le 1 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

ذ.ت.م أم لا على الفترة $[0,1]$ مع التعليل.

ملاحظات:

1. المجموع $V(f;P)$ لا ينقص أبدًا عند إضافة نقاط جديدة للتجزئة فمثلًا لو أضفنا النقطة t بين النقطتين x_k , x_{k-1} فإن: $|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ من المجموع ① السابق يصبح بالشكل:

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le|f(x_k)-f(t)|+|f(t)-f(x_{k-1})|.$$

2. إذا كانت P_1 , P_2 تجزئتان للفترة $[a,b]$ وكانت P_2 أدق أو أنعم أو أقوى كتجزئة فإن التغير المرافق لـ P_1 $\le$ التغير المرافق لـ P_2.

$$V(f;P_1)\le V(f;P_2)$$